Zobacz jak wyznaczał liczbę π Georges Buffon

Tomasz Sowiński

Eksperymentalne wyznaczanie liczby π opiera się na pewnej ciekawej obserwacji geometrycznej francuskiego hrabiego Georgesa Buffona z XVIII wieku. Na swój całkiem oryginalny pomysł Buffon wpadł chcąc wymyślić jakąś prostą grę hazardową dla wielu graczy, która nie wymagałaby posiadania specjalnych przedmiotów jak kostki czy karty. Aby zagrać w grę Buffona wystarczy mieć jedynie kartkę papieru, długopis i wykałaczkę lub zapałkę. Na kartce papieru należy narysować równoległe linie (tyle ile się zmieści), tak aby odległość pomiędzy sąsiednimi liniami była równa długości stosowanego podczas gry patyczka. Następnie zawodnicy na tak przygotowaną kartkę rzucają owy patyczek, tak jak rzuca się kostką do gry. Przed rzutem można poczynić zakłady o to czy patyczek przetnie którąś z linii czy też akurat spadnie tak, że linii nie przetnie. Jest to zatem coś w rodzaju gry w „orzeł czy reszka".

Okazuje się, że nie jest to jednak dokładny odpowiednik gry w rzut monetą, gdyż obie rozważane sytuacje (przecięcie i brak przecięcia) nie występują równie często. Można się o tym przekonać osobiście wykonując kilkadziesiąt prób. Okaże się, że rzucany na tak przygotowaną kartkę patyczek częściej spada tak, że przecina którąś z linii niż tak, że żadnej z linii nie przecina. Można powiedzieć, że jest to coś w rodzaju rzutu oszukaną monetą, która częściej ląduje jedną z jej stron. W naturalny sposób pojawia się, zatem pytanie o prawdopodobieństwo tego, że rzucony losowo pręt przetnie którąś z narysowanych linii. Problem ten jako pierwszy postawił sam Buffon i po ponad 40 latach sam znalazł jego rozwiązanie, które choć jest dość proste i eleganckie to wymaga jednak pewnej wiedzy matematycznej wykraczającej poza program szkoły średniej. Nie będziemy zatem tego rozumowania przedstawiać, a jedynie zaprezentujemy sam wynik. Oto okazuje się, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pręt rzucony losowo na planszę Buffona przetnie którąś z linii jest równe

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\pi}.$$

Ten wynik jest niesamowicie zaskakujący. W sposób zupełnie nieoczekiwany pojawia się w nim liczba π, czyli stosunek obwodu koła do jego średnicy. Ta obserwacja jest centralnym punktem naszej zabawy, gdyż mając taki wzór dość łatwo można wymyślić sposób na doświadczalne wyznaczenie liczby π.

Sposób ten opiera się na tzw. empirycznej definicji prawdopodobieństwa. Najłatwiej jest to zrozumieć odnosząc się do dobrze nam znanego „rzutu monetą". Często mówimy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orzełka wynosi $\frac{1}{2}$. Co to oznacza? Oznacza to, że jeśli byśmy wykonali bardzo dużo losowych rzutów monetą, to w połowie (czyli właśnie $\frac{1}{2}$) przypadków wypadnie orzeł. Krótko mówiąc sosunek liczby przypadków, w których wypadnie orzeł do liczby wszystkich prób będzie tym bliższy liczbie 0.5 im więcej rzutów wykonamy. Podobie rozumiemy, że prawdopodobieństwo wypadnięcia liczby 5 przy rzucie kostką wynosi $\frac{1}{6}$. Oznacza to, że gdybyśmy rzucali losowo kostką bardzo wiele razy, to stosunek liczby przypadków, w których wypadłaby liczba 5 do liczby wszystkich wykonanych rzutów zbliżałby się do liczby $\frac{1}{6}$ wraz ze wzrostem liczby rzutów.

W przypadku gry Buffona sotsunek liczby przypadków, w których rzucony losowo pręt przetnie którąś z linii do liczby wszystkich wykonanych prób zbliża się do liczby $\frac{2}{\pi}$ jeśli tylko zwiększamy liczbę prób. Chcąc zatem wyznaczyć doświadczalnie liczbę π musimy wykonywać kolejne losowe rzuty patyczka i liczyć ile razy przetnie on którąś z linii. Jeśli przy N rzutach linia zostanie przecięta x razy to znaczy, że stosunek $\frac{x}{N}$ jest przybliżeniem teoretycznego prawdopodobieństwa $\mathcal{P}$ wyznaczonego przez Buffona. Im więcej rzutów wykonamy tym większa dokładność tego przybliżenia. Zbierając to wszystko razem dochodzimy do wniosku, że przybliżona wartość liczby π po N rzutach może być wyznaczona ze wzoru

$$\pi \approx 2\frac{N}{x}$$

Wykorzystując tą metodę każdy może samodzielnie wyznaczyć sobie liczbę π. Im będzie miał więcej cierpliwości tym dokładniejszy wynik otrzyma, gdyż jedno jest kluczowo ważne: *im więcej losowań przeprowadzimy tym lepszy wynik otrzymamy.* Zatem do dzieła!